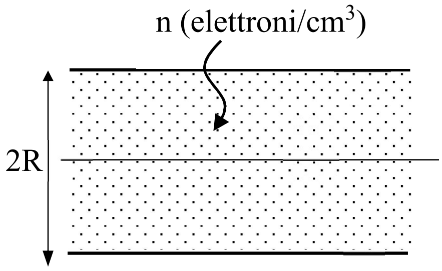
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Una sorgente emette un fascio di sezione circolare (di raggio R) di elettroni.
In $r_A < R$ l'intensità del campo elettrico da esso generato è di 0,03 V/m. Fuori dal fascio, a distanza $r_B > R$, il campo elettrico è tre volte più piccolo che quello in r_A.
Si chiede:
A) Scrivere le espressioni del modulo del **campo elettrico** in tutto lo spazio e farne un disegno schematico. B) Calcolare il **numero di elettroni per cm³** che costituiscono il fascio. C) Calcolare il **raggio R** del fascio.
Si supponga che gli elettroni, dentro il fascio, siano distribuiti uniformemente.



Dati: r_A = 5 cm ; r_B = 20 cm ; $E(r_A)$= 0,03 V/m ; $E(r_B)$= $E(r_A)/3$

$|e|$= 1,60 · 10^{-19} C ; ε_0= 8,85 ·10^{-12} S.I.

Soluzione

A) Il campo elettrico può essere calcolato applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica S di raggio r e lunghezza L, coassiale con l'asse del fascio di elettroni. Il campo elettrico, per simmetria, deve essere radiale, quindi nel calcolo del flusso va considerata solo la superficie laterale del cilindro S(r, L).

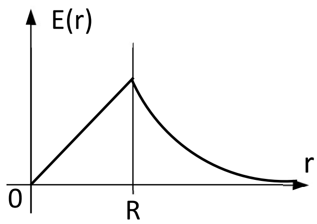
$\phi(E)_S = \frac{Q(\text{interna})}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(r)\cdot L\cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\, V(Q_i) = \frac{1}{\varepsilon_0} q\cdot n\cdot V(Q_i)$ dove $\rho = q\cdot n$ è la densità di carica per unità di volume e $V(Q_i)$ il volume dentro cui si trovano le cariche elettriche con densità ρ.

Nei due casi, all'interno e all'esterno del cilindro, abbiamo:

$r < R$: $E(r)\cdot L\cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0} qn\, V(Q_i) = \frac{1}{\varepsilon_0} qn\, \pi r^2 L$, da cui si ha: $E(r) = \frac{qn}{2\varepsilon_0}\, r$ $\therefore$

$r > R$: $E(r)\cdot L\cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0} qn\, V(Q_i) = \frac{1}{\varepsilon_0} qn\, \pi R^2 L$, da cui si ha: $E(r) = \frac{qn}{2\varepsilon_0}\, \frac{R^2}{r}$ $\therefore$

Il grafico del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse è:



B) Il campo nel punto r_A= 5 cm vale 0,03 V/m , quindi $E(r_A) = \frac{qn}{2\varepsilon_0}\, r_A = 0{,}03$ *da cui*: $n = E(r_A)\frac{2\varepsilon_0}{q r_A}$ $\therefore$

Numericamente: $n = 0{,}03\ \frac{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}05} \cong \frac{4\cdot 9}{5} 10^7 m^{-3} \cong 72 \ \ cm^{-3}$ $(valore\ esatto\ 66{,}4\ \ cm^{-3})$ $\therefore$

C) Il raggio R si può ricavare dalla relazione: $E(r_B)$= $E(r_A)/3$ $\rightarrow$ $\frac{E(r_B)}{E(r_A)} = \frac{\frac{qn}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r_B}}{\frac{qn}{2\varepsilon_0} r_A} = \frac{1}{3}$

da cui si ha: $R = \sqrt{\frac{r_A\cdot r_B}{3}} = \sqrt{\frac{100}{3}} \cong \sqrt{33} \cong 5{,}7$ cm $(valore\ esatto: 5{,}77\ cm)$ $\therefore$

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri un conduttore cilindrico cavo di raggio interno r_1, raggio esterno r_2 e di lunghezza L virtualmente infinita (cioè $L \gg r_2$) percorso da una corrente costante i. All'esterno del conduttore ci sia il vuoto. A distanza D dall'asse del conduttore il campo magnetico H vale 20 As/m.

A) Scrivere le espressioni del campo H in funzione della distanza r dall'asse del conduttore.

B) Fare un disegno schematico degli andamenti di cui alla domanda precedente.

C) Se esternamente al conduttore ci fosse stato un materiale magnetico con $\mu_r > 1$, come sarebbe variato il campo H in questa zona?

D) Calcolare il valore della corrente i che attraversa il conduttore.

Dati: r_1 = 4 mm ; r_2 = 8 mm ; D = 50 cm ; H(D)= 20 As/m

Soluzione

A) Il campo H può essere calcolato utilizzando il teorema di Ampère $\oint \overline{H} \cdot \overline{dl} = \sum i(\text{concatenate})$. La corrente concatenata i_c dipenderà dal raggio r considerato, ma si potrà sempre scrivere come $i_c(r) = J \cdot S_c(r)$ avendo definito la densità della corrente che attraversa il conduttore come: $J = \frac{\text{corrente totale}}{\text{superficie totale attraversata da i}} = \frac{i}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$

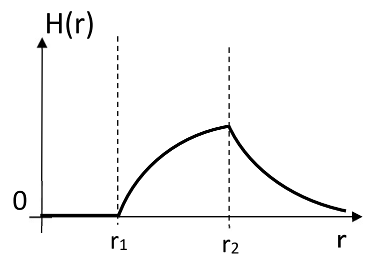
Il teorema di Ampère nelle tre zone dello spazio interessate sarà:

$r < r_1 : \quad i_c = 0 \quad \Longrightarrow \quad H(r) = 0 \quad \therefore$

$r_1 < r < r_2 : \quad i_c = J \cdot S(r) = J \cdot \pi(r^2 - r_1^2) \quad \Longrightarrow \quad H(r) \cdot 2\pi r = i_c \quad \text{da cui: } H(r) = J\frac{(r^2 - r_1^2)}{2r} = \frac{i}{2\pi r}\frac{(r^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \quad \therefore$

$r_2 < r : \quad i_c = i \quad \Longrightarrow \quad H(r) \cdot 2\pi r = i \quad \text{da cui: } H(r) = \frac{i}{2\pi r} \quad \therefore$ (è il campo di un filo percorso da una corrente i)

B) Il campo H ha il seguente andamento:



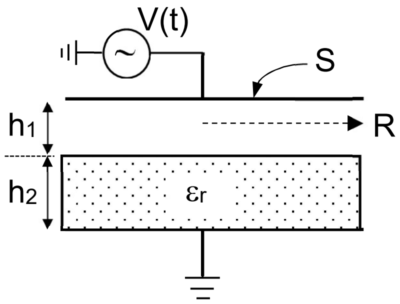
C) Il campo H dipende solo dalle correnti libere, quindi è indipendente dal materiale. Il campo rimane lo stesso.

D) Il valore della corrente i può essere calcolato utilizzando l'informazione su H(D).

$$H(D) = \frac{i}{2\pi D} \quad \text{da cui:} \quad i = 2\pi D\, H(D) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 20 = 62{,}8\ \text{A} \quad \therefore$$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Si consideri un condensatore con le armature piane e circolari di raggio R alimentato da un generatore di tensione variabile $V(t) = V_o \sin(\omega t)$. Tra le armature del condensatore è inserito un dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r che occupa solo la parte h_2 del condensatore, mentre la restante parte h_1 resta nel vuoto (vedi figura).



Si calcolino, all'interno del condensatore:

A) Le espressioni del campo elettrico (modulo e direzione).

B) Le espressioni della corrente di spostamento (modulo e direzione).

C) Le espressioni del campo di induzione magnetica B (modulo e direzione).

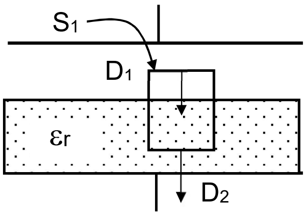
Si considerino h_1, $h_2 << R$, quindi si trascurino gli effetti ai bordi.

Soluzione

Tutti i campi elettrici avranno come direzione quella perpendicolare alle facce del condensatore.

A) I campi elettrici nei due materiali possono essere ricavati utilizzando due relazioni: 1) il teorema di Gauss applicato all'interno del condensatore e 2) la relazione fra il potenziale V(t) e il campo elettrico.

1) Scrivendo il teorema di Gauss attraverso un cilindro con superficie S_1 (vedi figura):



$\phi(\overline{D}) = Q(\text{libere interne}) = 0 \;\rightarrow\; -D_1 \cdot S_1 + D_2 \cdot S_1 = 0 \;\rightarrow\; D_1 = D_2$

Quindi: $E_1 = \varepsilon_r E_2$

2) La d.d.p. attraverso tutto il condensatore è $V(t) = V_{1,2} = \int_1^2 \overline{E} \cdot \overline{dl} = E_1 h_1 + E_2 h_2$

Quindi dalle due relazioni di cui sopra si può ricavare E_1: $E_1(t) = \frac{V(t) - E_2 h_2}{h_1} = \frac{V(t) - \frac{E_1}{\varepsilon_r} h_2}{h_1}$

da cui: $E_1(t) = \frac{\varepsilon_r V(t)}{h_2 + h_1 \varepsilon_r}$ e $E_2(t) = \frac{V(t)}{h_2 + h_1 \varepsilon_r}$ $\therefore$

B) La corrente di spostamento si può calcolare dalla relazione $J_S = \frac{\partial D(t)}{\partial t}$, essendo uguali i due vettori D_1 e D_2 sarà uguale anche la corrente di spostamento che avrà il valore:

$$J_S(t) = \frac{\partial D_1(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 E_1(t) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r\, \omega V_0}{h_2 + h_1 \varepsilon_r} \cos \omega t$$

C) Il campo B sarà, punto per punto, tangente ad una serie di circonferenze con centro sull'asse del condensatore.

Il modulo sarà dato da $\oint \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 \sum i(\text{concatenate}) = \mu_0\, J \cdot S$ per una generica circonferenza interna di raggio r.

Quindi: $B(r,t) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot J \cdot \pi r^2$ da cui: $B(r,t) = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{h_2 + h_1 \varepsilon_r} r \omega V_0 \cos \omega t$